

Addendum: Commentaar ivm de zelfinductie.

De zelf- en mutuele inductiecoëfficiënten worden berekend aan de hand van de formule van Neumann:

$$M_{ij} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_i} \oint_{l_j} \frac{dl_i dl_j}{r_{ij}} \quad (1)$$

De toepassing van deze uitdrukking stelt geen enkel probleem voor de mutuele inductie. Daarentegen bij de zelfinductie gaat de uitdrukking naar oneindig.

Dit wordt twee keer bewezen in het o.o. Elektriciteit van Leo Van Biesen.

Een eerste keer bij de twee evenwijdige lijnvormige geleiders op blz 263 en 264.

Een tweede keer bij de cirkelvormige stroomkring op blz 267 en 268.

In beide gevallen is de oorzaak van het probleem te vinden in dat het magnetisch veld (idem voor het inductieveld) naar oneindig gaat in het centrum van de geleiders omdat men de stroom concentreert op een oneindig dun lijnelement precies gelegen in het centrum van de geleiders.

Het is genoeg van de stroom uniform te verdelen over de doorsnede van de geleiders om het probleem volledig op te lossen zoals uitgewerkt op blz 265 en 266.

Door aan de geleiders weer een fysieke dikte te geven, (geen concentratie van de stroom in een oneindig dun lijnelement) moet de zelfinductiecoëfficiënt opgesplitst worden in twee delen, namelijk:

- de zelfinductiecoëfficiënt voor magnetische energie aanwezig buiten de geleider L_{uit} en

- de zelfinductiecoëfficiënt voor magnetische energie aanwezig binnen de geleider L_{int}

De berekening van de inwendige zelfinductie wordt op blz 277 tot 279 uitgelegd aan de hand van de magnetische energie berekend met de fluxen en stromen.

In wat volgt wordt het nog eens uitgelegd aan de hand van de magnetische energie berekend enkel met het magnetisch veld \mathbf{H} .

We berekenen het magnetisch veld aan met de formule: $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_{omvat}$ (2)

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \mathbf{H}(r) r d\phi = 2\pi r H(r) = \frac{\pi r^2}{\pi a^2} I = I \frac{r^2}{a^2} \text{ of } H(r) = \frac{I}{2\pi} \frac{r}{a^2} \quad (3)$$

De magnetische energie is gegeven door:

$$W_{int} = \int_v \frac{\mu_0}{2} \mathbf{H}^2 dv = \frac{L_{int} I^2}{2} = \int_{r=0}^{r=a} r dr \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{z=0}^{z=1} \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{(2\pi)^2} \frac{r^2}{a^4} dz \quad (4)$$

$$W_{int} = \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{a^4} \left[\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \right] \left[\int_{z=0}^{z=1} dz \right] \left[\int_{r=0}^{r=a} r^3 dr \right] = \frac{\mu_0}{2} \frac{I^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{a^4} 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi} \quad (5)$$

Waaruit volgt:

$$L_{int} = \frac{2 W_{int}}{I^2} = \frac{\mu_0}{8\pi} = 50nH/m \quad (6)$$

Verband met het Skin-Effect.

In het onderwijsonderdeel Elektromagnetisme stapt men resoluut af van de uniforme verdeling van de stroomdichtheid over de geleider. Hier wordt de verdeling van de stroomdichtheid in een cilindrische geleider analytisch berekend aan de hand van de theorie van het Skin-Effect.

Door energetische beschouwingen in te lassen wordt de impedantie van de geleider berekend met:

$$Z = R_{AC} + j\omega L_{AC} = \frac{1}{2\pi a\sigma} \frac{k J_0(ka)}{J_1(ka)} \quad (7)$$

$$\text{waar: } k = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{j\frac{3\pi}{4}} = \frac{|k|}{\sqrt{2}} (-1 + j) \quad \text{en } |k| = \frac{\sqrt{2}}{\delta} \quad \text{en } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \quad (8)$$

We veronderstellen dat de uniforme verdeling van de stroomdichtheid over de geleider overeenstemd met de verdeling die ontstaat bij gelijkstroom (DC).

Hierdoor is de weerstand van de geleider dan gelijk aan

$$R_{DC} = \frac{1}{\pi a^2 \sigma} \quad (9)$$

$$\text{evenals: } L_{DC} = \frac{\mu_0}{8\pi} \quad (10)$$

Men wenst nu aan te tonen dat de uitdrukking van het Skin-Effect wel degelijk naar de hierboven aangehaalde gelijkstroomwaarden streeft bij lage frequenties.

Twee wegen gaan belopen worden: een numerische uitwerking met MathLab en een analytische berekening.

De numerische uitwerking met MathLab.

Het gaat om een uiterst kort programmatje geschreven in MathLab 6.5 met naam Internal-Self.m.

De code wordt hieronder gegeven.

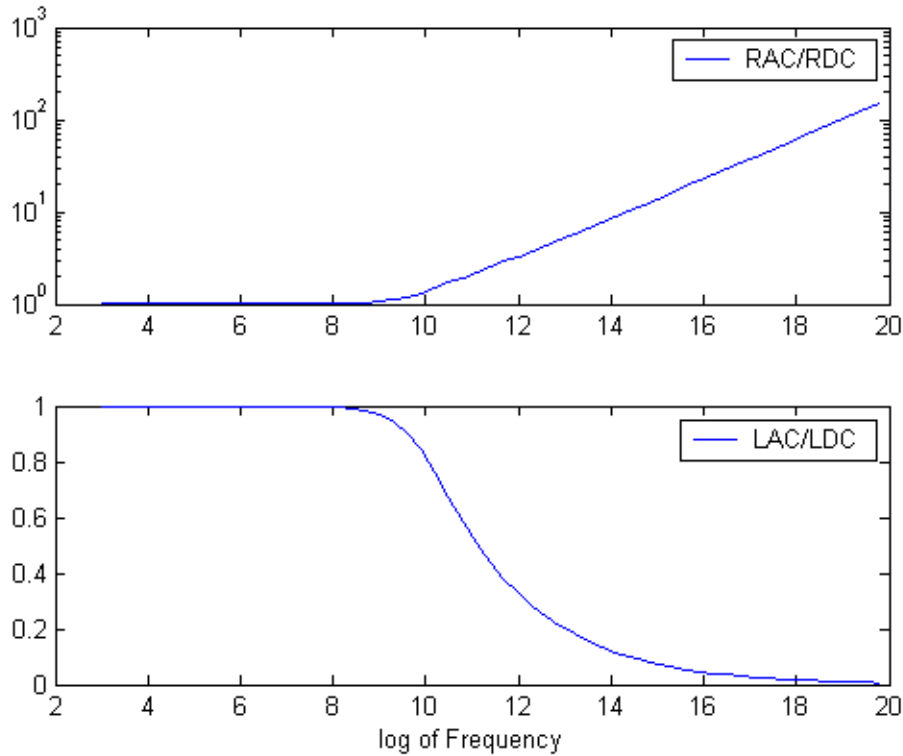
```
% InternalSelf.m

% This simulation links the Theory of Skin-Effect to the asymptotic
% InternalSelf.m
% This simulation links the Theory of Skin-Effect to the asymptotic
% value  $\mu_0/8\pi$  of the internal selfinduction for
% a straight circular conductor.
clear all;
a = 1e-3; % radius of the wire
sigma = 58e6; % conductivity of copper
mu = 4*pi*1e-7; % permeability of vacuum
n = [3:0.3:20];
Lo = mu/(8*pi); % inductance at DC
Ro = 1/(sigma*pi*(a)^2); % resistance at DC
Lof = repmat(Lo,length(n),1);
Rof = repmat(Ro,length(n),1);
% value  $\mu_0/8\pi$  of the internal selfinduction for
% a straight circular conductor.
clear all;

a = 1e-3; % radius of the wire
sigma = 58e6; % conductivity of copper
mu = 4*pi*1e-7; % permeability of vacuum
n = [3:0.3:20];
Lo = mu/(8*pi); % inductance at DC
Ro = 1/(sigma*pi*(a)^2); % resistance at DC
Lof = repmat(Lo,length(n),1);
Rof = repmat(Ro,length(n),1);
f = exp(n); % frequency
om = 2*pi*f;
delta = sqrt(2./(om*mu*sigma)); % Skin depth
k = ((sqrt(2))./delta)*exp(j*3*pi/4);
ka = k*a;
coef = 1/(2*pi*a*sigma);
Z = coef*k.*besselj(0,ka)./(besselj(1,ka));
R = real(Z);
L = imag(Z)./om;

clf; subplot 211; semilogy(log(f),R./Ro);
subplot 212; plot(log(f),L./Lo);
```

De volgende figuur bevestigt de stelling.



De analytische berekening.

Om de weerstand en de selfinductie van elkaar af te splitsen in de uitdrukking (37) moet men de complexe grootte k vervangen door:

$$\frac{|k|}{\sqrt{2}} (-1 + j) \quad (11)$$

$$Z = R_{AC} + j\omega L_{AC} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi a^2 \sigma} \left[\frac{(-1 + j) |k| a J_0(ka)}{J_1(ka)} \right] \quad (12)$$

Door het reel deel te nemen van (42) bekomt men rechtstreeks R_{AC} , dus is dan de verhouding van de weerstand in AC tot deze in DC gegeven door:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Real} \left[\frac{(-1 + j) |k| a J_0(ka)}{J_1(ka)} \right] \quad (13)$$

Vooraleer uitdrukking (43) verder uit te werken, gaan we de selfinductie uit (42) halen door Z te delen door ωL_{DC} :

$$\frac{Z}{\omega L_{DC}} = \frac{R_{AC}}{\omega L_{DC}} + j \frac{L_{AC}}{L_{DC}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi a^2 \sigma} \frac{8\pi}{\omega \mu_0} \left[\frac{(-1 + j) |k| a J_0(ka)}{J_1(ka)} \right] \quad (14)$$

De pulsatie ω drukken we uit in functie van de andere parameters, namelijk uit (38c):

$$\omega = \frac{2}{\mu_0 \sigma \delta^2} \quad (15)$$

en na vervanging van δ uit (38b): (16)

$$\frac{L_{AC}}{L_{DC}} = \text{Imag} \left\{ \frac{8\pi}{\mu_0} \frac{1}{2\sqrt{2}\pi a^2 \sigma} \frac{\mu_0 \sigma}{|k|^2} \left[\frac{(-1+j) |k|a J_0(ka)}{J_1(ka)} \right] \right\} \quad (17)$$

of

$$\frac{L_{AC}}{L_{DC}} = 2\sqrt{2} \text{Imag} \left[\frac{(-1+j) J_0(ka)}{|k|a J_1(ka)} \right] \quad (18)$$

De Bessel functie van een complex argument zoals ka , is ook een complexe grootheid en wordt ontbonden in de traditionele Kelvin functies als volgt:

$$J_0(ka) = \text{ber}_0(|k|a) + j \text{bei}_0(|k|a) \quad (19)$$

$$J_1(ka) = \text{ber}_1(|k|a) + j \text{bei}_1(|k|a) \quad (20)$$

De stelling herleid zich dus tot het zoeken van de limiet van de twee uitdrukkingen:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \text{Real} \left[\frac{(-1+j) x (\text{ber}_0(x) + j \text{bei}_0(x))}{(\text{ber}_1(x) + j \text{bei}_1(x))} \right] \right\} \quad (21)$$

$$\frac{L_{AC}}{L_{DC}} = 2\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \text{Imag} \left[\frac{(-1+j) (\text{ber}_0(x) + j \text{bei}_0(x))}{x (\text{ber}_1(x) + j \text{bei}_1(x))} \right] \right\} \quad (22)$$

voor x gaande naar nul.

Gezien x zuiver reel is moet men in beide uitdrukkingen dezelfde rationalizeren uitvoeren:

$$(-1+j) \frac{[\text{ber}_0(x) + j \text{bei}_0(x)]}{[\text{ber}_1(x) + j \text{bei}_1(x)]} = \frac{(-1+j) [\text{ber}_0(x) + j \text{bei}_0(x)][\text{ber}_1(x) - j \text{bei}_1(x)]}{[\text{ber}_1(x)^2 + \text{bei}_1(x)^2]} \quad (23)$$

$$= \frac{\{[\text{ber}_0(\text{bei}_1 - \text{ber}_1) - \text{bei}_0(\text{ber}_1 + \text{bei}_1)] + j [\text{ber}_0(\text{ber}_1 + \text{bei}_1) - \text{bei}_0(\text{ber}_1 - \text{bei}_1)]\}}{[\text{ber}_1(x)^2 + \text{bei}_1(x)^2]}$$

Bijgevolg zijn:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x \{ \text{ber}_0(x)[\text{ber}_1(x) + \text{bei}_1(x)] - \text{bei}_0(x)[\text{ber}_1(x) - \text{bei}_1(x)] \}}{[\text{ber}_1(x)^2 + \text{bei}_1(x)^2]} \right\} \quad (24)$$

$$\frac{L_{AC}}{L_{DC}} = 2\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{(\text{ber}_0(x)[\text{bei}_1(x) - \text{ber}_1(x)] - \text{bei}_0(x)[\text{ber}_1(x) + \text{bei}_1(x)])}{x [\text{ber}_1(x)^2 + \text{bei}_1(x)^2]} \right\} \quad (25)$$

De limieten van deze uitdrukkingen zijn onbepaald (= 0/0) als we x aan nul stellen.

We moeten dan de regel van l Hopital toepassen en daarvoor vervangen we de Kelvin functies door reeksontwikkelingen (zie formules 9.910 en 9.9.9 in Abramowitz & Stegun)

$$\text{ber}_0(x) = 1 - \frac{x^4}{64} + \dots \quad \text{bei}_0(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^6}{384} + \dots \quad (26)$$

$$\text{ber}_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-x - \frac{x^3}{8} + \dots \right) \quad \text{bei}_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(x - \frac{x^3}{8} + \dots \right) \quad (27)$$

De kwadraten van ber_1 en bei_1 zijn:

$$\text{ber}_1(x)^2 = \frac{1}{8} \left(x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{64} + \dots \right) \quad \text{bei}_1(x)^2 = \frac{1}{8} \left(x^2 - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{64} + \dots \right) \quad (28)$$

waaruit de som: $[\text{ber}_1(x)^2 + \text{bei}_1(x)^2] = \frac{1}{4} \left(x^2 + \frac{x^6}{64} + \dots \right) \quad (29)$

Na vervanging en uitwerking bekomt men:

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\sqrt{2} \left(x^2 - \frac{x^6}{64} + \frac{x^6}{32} + \dots \right)}{\left(x^2 + \frac{x^6}{64} + \dots \right)} \right\} = 1 \quad (30)$$

en

$$\frac{L_{AC}}{L_{DC}} = 2\sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{2\sqrt{2} \left(\frac{x^3}{8} - \frac{x^7}{512} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^7}{384} \right)}{\left(x^3 + \frac{x^7}{64} + \dots \right)} \right\} = 1 \quad (31)$$