

Ruizige Systeemtheorie

Prof. Yves Rolain

12 juni 2018

Inhoudsopgave

1	Ruissignalen in systeemtheorie	3
1.1	Soorten signalen	3
1.1.1	Deterministische signalen	3
1.1.2	Stochastische signalen	3
1.1.3	Periodieke signalen	4
1.2	Eigenschappen van stochastische signalen	4
1.3	Statistische gemiddelden: lichaams- en ensemblagemiddelde	5
1.4	Classificatie van stochastische signalen	7
1.4.1	Gemengde signalen	7
1.4.2	Strikt stationaire signalen	8
1.5	Realisatiegemiddelden	10
1.6	Ergodische processen	12
1.6.1	Ergodiciteit van het gemiddelde	13
1.6.2	Ergodiciteit van de correlatiefunctie	15
1.6.3	Voorbeeld 1: stationair en niet ergodisch proces	16
1.6.4	Voorbeeld 2: niet stationair en ergodisch proces	16
2	Spectrum van een ruissignaal	19
2.1	Theorema van Wiener-Kinchin	19
2.1.1	Wiener-Kinchin: Fourier getransformeerde van $\rho_{XX}(\tau)$	19
2.1.2	Wiener Kinchin en ergodiciteit	20
2.1.3	Hoe maken we dit bruikbaar?	20
2.1.4	Het vermogen bepalen in het frequentiedomein	21
2.1.5	Van $S_{X,T}^{(k)}(f)$ naar $S_{XX}(f)$	23
2.2	Het periodogram als schatter voor het lichaamsgemiddelde $\Sigma_X(f)$	23
2.3	$\Sigma_X(f)$ meten met het periodogram	24
2.3.1	Alternatieve methode: gebruik Wiener-Kinchin	26
2.4	Eigenschappen van de autocorrelatiefunctie van ruissignalen	26
2.4.1	Waarde van de correlatiefunctie voor $\tau \rightarrow \infty$	26
2.4.2	Waarde van de autocorrelatiefunctie van een ruissignaal voor $\tau = 0$	27
2.4.3	Verband tussen autocorrelatie en variantie van een ruissignaal	28
2.4.4	De autocorrelatie is een even functie van τ	28

<i>INHOUDSOPGAVE</i>	2
2.4.5 Voor een stationair proces is $ \rho_{XX}(\tau) < \rho_{XX}(0)$	28
2.5 Eigenschappen van de autocorrelatiefunctie van deterministische signalen	29
2.5.1 De autocorrelatie van een periodiek signaal is periodiek met dezelfde periode	29
2.5.2 Voorbeeld: Autocorrelatie van een symmetrische blok golf	30
3 FRF voor ruizige excitaties	33
3.1 Transferfunctie van een LTI: van definitierelatie tot meting.	33
3.1.1 Periodieke excitatie: spectrale voorstelling.	33
3.1.2 Random excitatie: correlatietechnieken.	34
3.1.3 Ruis excitatie: invloed van een eindig meetvenster.	36

Hoofdstuk 1

Ruissignalen in systeemtheorie

1.1 Soorten signalen

1.1.1 Deterministische signalen

De wetmatigheid die deterministische signalen beschrijft, is vooraf en perfect gekend. Dit betekent dat de evolutie van het signaal over de tijd perfect kan voorspeld worden aan de hand van een wiskundig model. Bij de analyse van het signaal moet men zich dus niet beroepen op enige vorm van statistiek.

Bemerk dat opdat een signaal informatie zou kunnen bevatten het noodzakelijk is dat het signaal een stochastisch karakter zou hebben: als alles op voorhand gekend is, is er namelijk geen informatieoverdracht mogelijk.

Zo bevat het sinussignaal

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (1.1)$$

(met A_0, ω_0, φ_0 constanten) geen informatie, daar het een perfect deterministisch signaal is. Het heeft dus geen zin om dit signaal voor informatieoverdracht te gebruiken. De informatie-inhoud ervan is immers nul, aangezien we met de kennis van de parameters A_0, ω_0, φ_0 aan de ontvangtzijde het signaal $s(t)$ perfect kunnen reconstrueren zonder enige transmissie!

1.1.2 Stochastische signalen

De wetmatigheid die het signaal beschrijft is nu **niet a priori gekend**. Dit betekent dat het gedrag van het signaal (deels) onvoorspelbaar is. Het kan in het algemeen enkel beschreven worden door statistische parameters. Deze signalen dienen dus als statistische grootheden behandeld te worden.

1.1.3 Periodieke signalen

Deze deterministische signalen vormen de basis van de harmonische analyse. Ze zijn zeer belangrijk zowel voor theoretische studies als voor praktische toepassingen. Hun eigenschappen zijn in mindere of meerdere mate overdraagbaar op stochastische signalen.

1.2 Eigenschappen van stochastische signalen

Een stochastisch proces is een proces dat zich oneindig in de tijd ontwikkelt, maar waarvan het gedrag minstens voor een gedeelte door probabilistische wetmatigheden wordt bepaald. Wiskundig gesproken is een stochastisch proces een functie van twee variabelen

$$X(k, t) = X^{(k)}(t) \quad (1.2)$$

waar k waarden aanneemt die bekomen worden uit een stochastisch lichaam of proces en t de tijd is.

Voor elk willekeurig tijdstip $t = t_i$, is $X^{(k)}(t_i)$ een stochastische variabele die afkomstig uit het stochastisch lichaam. Stochastische signalen worden bijgevolg door het stochastisch lichaam gegenereerd.

Elke functie $X^{(k)}(t)$ behoort tot de verzameling $X(t)$ van alle mogelijke functies $X^{(k)}(t)$. Men noemt $X^{(k)}(t)$ een **realisatie** van het stochastisch proces $X(t)$. Deze realisaties kunnen gedefinieerd worden op discrete tijdstippen t_1, t_2, \dots, t_n of voor willekeurige waarden van t .

Voorbeeld. We beschouwen twee voorbeelden van stochastische processen.

- Het stochastisch lichaam $X(t)$ is het elektrisch vermogen dat verbruikt wordt bij klanten van een elektriciteitsproducent. Dan is $X^{(k)}(t)$ het verbruik dat opgemeten wordt bij de klant k .
- Het stochastisch lichaam is de verzameling van alle dobbelstenen ter wereld. Dan is de k^{de} realisatie het aantal gegooide ogen op een bepaald ogenblik voor de dobbelsteen k .

Om de statistische eigenschappen van stochastische signalen te kunnen bestuderen, maakt men gebruik van de waarschijnlijkheidsleer. Opnieuw zullen we een aantal begrippen moeten definiëren, en we beginnen met de kans:

Definitie 1. De kans dat de waarde van een stochastische variabele $X(t)$ op het tijdstip t_1 kleiner is dan een constante waarde x_1 noteren we als $P(X(t_1) \leq x_1)$.

We kunnen nu de verdeling van alle mogelijke waarden van de stochastische variabele beschrijven aan de hand van deze kans, door $x_1; t_1$ achtereenvolgens alle mogelijke waarden te laten aannemen:

Definitie 2. De cumulatieve kansverdelingsfunctie of de cumulatieve distributiefunctie

$$F_X(x_1; t) = P(X(t_1) \leq x_1) \quad (1.3)$$

bepaalt de kans $P(X(t_1) \leq x_1)$ voor alle mogelijke waarden van x_1 .

We kunnen uit de cumulatieve verdelingsfunctie de probability density function (pdf) bepalen als volgt:

Definitie 3. De probability density function (pdf) van een kansveranderlijke bekomen we door de cumulatieve kansverdeling F_1 af te leiden naar de waarde x_1 van de kansveranderlijke:

$$f_X(x_1; t_1) = \frac{\partial F_X(x_1; t_1)}{\partial x_1} \quad (1.4)$$

Op analoge wijze kan men de cumulatieve distributiefunctie en de pdf afleiden in het geval dat de stochastische variabele functie is van n veranderlijke.

Definitie 4. We bekomen dan voor de cumulatieve verdelingsfunctie

$$F_{X\dots X}(x_1\dots x_n; t_1\dots t_n) = P(X(t_1) \leq x_1; \dots; X(t_n) \leq x_n) \quad (1.5)$$

wat overeen komt met de kans dat $X(t_1) \leq x_1$, **en** dat $X(t_2) \leq x_2, \dots$, **en** dat $X(t_n) \leq x_n$

We kunnen dan ook de pdf definiëren voor dit proces door de cumulatieve verdelingsfunctie achtereenvolgens af te leiden naar elk van de waardes x_i van de kansveranderlijke

Definitie 5. De probability density function (pdf) van een kansveranderlijke die een functie is van n veranderlijken bekomen we door de kansverdeling F_n af te leiden naar de waarde van elke kansveranderlijke x_1, \dots, x_n :

$$f_{X\dots X}(x_1\dots x_n; t_1\dots t_n) = \frac{\partial^n F_{X\dots X}(x_1\dots x_n; t_1\dots t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \quad (1.6)$$

1.3 Statistische gemiddelden: lichaams- en ensemblegemiddelde

De lichaamsgemiddelden zijn niets anders dan de **Statistische momenten** (eerste orde, tweede orde of gemengde momenten) van het stochastisch proces.

We zullen hier nu de verschillende momenten eens op een rijtje zetten. Om ze te definiëren hebben we nood aan de verwachte waarde, die we zullen voorstellen als E .

1. Het gemiddelde is het moment van de eerste orde en wordt gegeven door

$$\mu_X(t_1) = E(X(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1) dx_1 \quad (1.7)$$

2. Het kwadratisch gemiddelde is één van de momenten van de tweede orde:

$$E(X^2(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_X(x_1; t_1) dx_1 \quad (1.8)$$

3. De variantie is het centraal moment van de tweede orde,

$$\sigma_X^2(t_1) = E([X(t_1) - E(X(t_1))]^2) = E(X^2(t_1)) - [E(X(t_1))]^2 \quad (1.9)$$

4. De lichaamscorrelatiefunctie is het tweede orde moment van twee signalen

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = E(X(t_1)Y(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 f_{XY}(x_1, y_2; t_1, t_2) dx_1 dy_2 \quad (1.10)$$

Men noemt de correlatiefunctie ρ_{XY} ook de kruiscorrelatiefunctie (cross-correlation function) om aan te geven dat X en Y verschillende processen zijn

Als de lichamen stochastisch onafhankelijk zijn, is $f_{XY}(x_1, y_2; t_1, t_2) = f_X(x_1; t_1) f_Y(y_2; t_2)$ en dus is

$$\rho_{XY}(t_1, t_2) = \mu_X(t_1) \mu_Y(t_2) \quad (1.11)$$

5. De lichaamsautocorrelatiefunctie is een speciaal geval van de crosscorrelatie

$$\rho_{XX}(t_1, t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (1.12)$$

waarbij men tweemaal hetzelfde signaal gebruikt.

Stellen we nu ook $t_1 = t_2$, dan moet ook $x_1 = x_2$ en wordt $f_{XX}(x_1, x_1; t_1, t_1) = f_X(x_1; t_1)$

$$\rho_{XX}(t_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 f_X(x_1; t_1) dx_1 = E(X^2(t_1)) \quad (1.13)$$

6. De covariantie is het centraal tweede orde moment van twee signalen

$$\begin{aligned} \sigma_{XY}^2(t_1, t_2) &= E([X(t_1) - E(X(t_1))][Y(t_2) - E(Y(t_2))]) \quad (1.14) \\ &= \rho_{XY}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_Y(t_2) \end{aligned}$$

en leiden we dus af van de correlatiefunctie. Uiteraard vormt de variantie een speciaal geval van deze uitdrukking. Vullen we $X = Y$ in, dan vinden we de uitdrukking van hierboven terug. We kunnen de laatste overgang in dan weer berekenen, door gewoon de definitierelatie te gebruiken.

$$\begin{aligned} \sigma_{XY}^2(t_1, t_2) &= E([X(t_1) - E(X(t_1))][Y(t_2) - E(Y(t_2))]) \\ &= E(XY - XE(Y) - E(X)Y + E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(X(t_1)Y(t_2)) - E(X(t_1))E(Y(t_2)) \quad (1.15) \end{aligned}$$

De expliciete afhankelijkheid van X en Y naar t_1 en t_2 werd in de twee middelste lijnen weggelaten om de uitdrukkingen wat in te korten.

1.4 Classificatie van stochastische signalen

1.4.1 Gemengde signalen

In vele praktische gevallen beschouwt men een deterministisch signaal $s(t)$, waaraan men een stochastisch signaal $X(t)$ toevoegt (dit kan dan de ruis voorstellen). Dergelijke signalen zijn gemengde signalen (**mixed signals**). We beschouwen dat de ruis additief is en bekomen dan als model voor het gemengd signaal $Y(t_1)$:

$$Y(t_1) = s(t_1) + X(t_1) \quad (1.16)$$

Indien $f_X(x; t)$ de pdf voorstelt van het stochastisch signaal $X(t)$ en $f_Y(y; t)$ de pdf van het stochastisch signaal $Y(t)$, kunnen we ook het verband afleiden tussen deze twee pdf's $f_X(x; t_1)$ en $f_Y(y; t_1)$.

Stelling 6. *De pdf van het gemengd signaal is gelijk aan de som van de pdf van de ruiscomponent en het deterministisch signaal.*

Bewijs. Wordt reeds gegeven in de cursus statistiek en is hier enkel ter info weergegeven. Hiertoe vertrekken we van de vorige vergelijking (1.16) en evalueren deze op $t = t_1$. Het deterministisch karakter van $s(t)$ impliceert dat $s(t_1) = C^{te}$. We gebruiken dan (1.16) vervolgens om het verband te bepalen tussen de kans $P(x < X(t_1) < x + dx)$ en $P(y < Y(t_1) < y + dy)$ en vinden dat:

$$P(x < X(t_1) < x + dx) = P(y < Y(t_1) < y + dy) \quad (1.17)$$

Invoeren van de definitie van de pdf leidt tot

$$f_X(x; t_1) dx = f_Y(y; t_1) dy \quad (1.18)$$

We gebruiken nu opnieuw (1.16), maar ditmaal met de ogenblikkelijke waardes x en y van de kansveranderlijken ingevuld:

$$y = x + s(t_1)$$

differentiëren geeft dan

$$dy = dx$$

en dus wordt (1.18)

$$\begin{aligned} f_X(x; t_1) &= f_Y(y; t_1) \\ \Leftrightarrow f_X(x; t_1) &= f_Y(x + s(t_1); t_1) \end{aligned}$$

Hieruit kunnen we afleiden dat de pdf's inderdaad een gelijke vorm hebben, maar dat de gemiddelde waarde verschilt met de waarde van de deterministische signaalcomponent \square

Voorbeeld. Beschouw de som van een constant signaal $s(t) = C$ en een normaal verdeeld stochastisch signaal $X(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Wanneer we de pdf van de som $Y(t) = s(t) + X(t)$ opstellen, vinden we dat $Y(t) \sim \mathcal{N}(C, \sigma^2)$, wat overeenstemt met de stelling.

1.4.2 Strikt stationaire signalen

Definitie. Strikt stationaire signalen zijn signalen waarvan alle statistische momenten invariant blijven onder een arbitraire verschuiving van de tijdsprong.

Mathematisch gezien wordt dit voor de pdf van het **stochastisch proces** uitgedrukt als volgt:

$$\begin{aligned} f_{X\dots X}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) \\ = f_{X\dots X}(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + T, t_2 + T, \dots, t_n + T) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Indien deze eigenschap geldig is $\forall T$, dan is het signaal **strikt stationair (wide sense stationary)**.

Voorbeeld. Neem als voorbeeld het signaal $Y(t) = \cos(\omega_0 t + X)$, waar het stochastisch proces X een pdf $f_X(x)$ heeft in het interval $[0, 2\pi]$ en $\omega_0 = C^{te}$.¹ Om na te gaan of het signaal $Y(t)$ stationair is zal men het signaal verschuiven over een willekeurige tijd $t = \tau$ en de pdf berekenen van het nieuwe signaal

$$Y(t + \tau) = \cos(\omega_0(t + \tau) + X) = \cos(\omega_0 t + B) \quad \text{met} \quad B = X + \omega_0 \tau \quad (1.20)$$

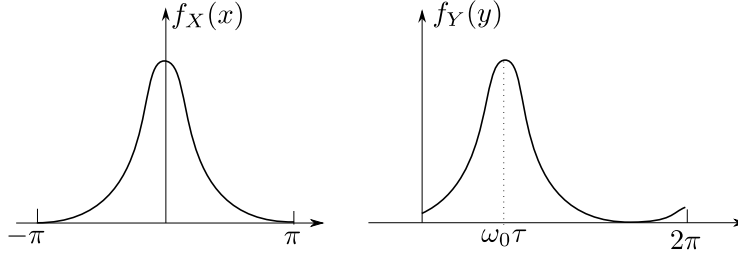
Wegens de zopas ingevoerde definitie is B een “mixed signal”. Het signaal bestaat inderdaad uit de som van een volledig stochastisch proces X en een deterministische component $\omega_0 \tau$.

We kunnen nu gebruik maken van de stelling op de vorige pagina die toelaat om de pdf $f_Y(y; t_1)$ van $Y(t + \tau)$ gelijk te stellen aan de pdf van X op de gemiddelde waarde na.

$$f_Y(y; t + \tau) = \omega_0 \tau + f_X(x; t + \tau) \quad (1.21)$$

Als het signaal $Y(t)$ stationair is, moet de densiteit $f_Y(y; t + \tau)$ onafhankelijk zijn van de tijdsverschuiving τ . Dit is enkel het geval indien $f_Y(y; t + \tau)$ onafhankelijk is van τ . Vermits de vorm van de pdf van X en Y identiek is op een constante verschuiving na (zie figuur 1.1) moet de stochastische variabele X een uniforme distributie hebben in het interval $[0, 2\pi]$, anders wordt de waarschijnlijkheid om een bepaalde waarde van de fase te bekomen veranderd telkens als $\omega_0 \tau$ verandert. De pdf moet dus uniform zijn $f_X(x) = \frac{1}{2\pi}$.

¹Het interval kan beperkt worden tot $[0, 2\pi]$ of tot $[-\pi, \pi]$. Om dat in te zien, stellen we dat X willekeurige waarden kan aannemen, wat betekent dat $X \in [-\infty, \infty]$. Zelfs voor deze onbegrensde waarden van X , kunnen we nog steeds stellen dat $X = \theta + k \cdot 2\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$ en $\theta \in [0, 2\pi]$. Voor elk tijdstip t_i geldt er dan steeds dat $\eta(t) = \cos(\omega_0 t + X) = \cos(\omega_0 t + \theta)$, zodat het interval wel degelijk mag beperkt worden.



Figuur 1.1: Voorbeeld van densiteitsfuncties $f_X(x)$ van de stochastische processen X en $Y = \omega_0\tau + X$

De voorwaarde tot strikte stationariteit voor een signaal eist dat

$$f_{\underbrace{X \dots X}_N}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{\underbrace{X \dots X}_N}(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) \quad (1.22)$$

moet gelden $\forall \tau$. Dit moet dus ook gelden in het bijzonder gelden voor $\tau = -t_1$. Men bekomt dan:

$$f_{\underbrace{X \dots X}_N}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{\underbrace{X \dots X}_N}(x_1, \dots, x_n; 0, t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1) \quad (1.23)$$

Om deze voorwaarde beter te kunnen interpreteren, gaan we eerst de speciale gevallen $n = 1$ en $n = 2$ bekijken. Beschouw eerst het speciaal geval dat $n = 1$. Dan vindt men voor (1.23):

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; 0) = f_X(x_1)$$

wat betekent dat de densiteit niet afhankelijk van de tijd. Substitueert men deze voorwaarden in de definitierelaties voor de lichaamsmiddelen, dan vindt men:

$$E(X(t_1)) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1) dx_1 = \mu_X = C^{te} \quad \forall t_1 \quad (1.24)$$

Het lichaamsgemiddelde is dus onafhankelijk van de tijd. Voor de variantie vindt men analogo dat:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t_1) &= E\left([X(t_1) - E(X(t_1))]^2\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx = \sigma_X^2 = C^{te} \quad \forall t_1 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Hieruit besluiten we dat gemiddelde en variantie inderdaad niet afhangen van de tijd. Het proces is dus strikt stationair.

Voor het speciaal geval $n = 2$ leidt (1.23) tot een afhankelijkheid van het tijdsverschil $t_2 - t_1$:

$$f_{XX}(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_{XX}(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f_{XX}(x_1, x_2; t_2 - t_1)$$

wat betekent dat de densiteit voor $n = 2$ slechts afhangt van het tijdsverschil $t_2 - t_1$. We bepalen voor dit speciaal geval de correlatiefunctie via het lichaams-gemiddelde en bekomen

$$\begin{aligned} \rho_{XX}(t_1, t_2) &= E(X(t_1)X(t_2)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{XX}(x_1, x_2; t_2 - t_1) dx_1 dx_2 \\ &= \rho_{XX}(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (1.26)$$

m.a.w. de autocorrelatiefunctie is enkel afhankelijk van het tijdsverschil $t_2 - t_1$. Merk op dat deze eigenschap in het geval van de lichaamsautocorrelatiefunctie enkel voor strikt stationaire signalen opgaat.

1.5 Realisatiegemiddelden

Praktisch beschikt men meestal niet over alle realisaties van het stochastisch lichaam, en dus kunnen we de vorige momenten niet bepalen. Wat wel mogelijk is, is om 1 of een aantal realisaties van het stochastisch lichaam te kennen door ze te meten.

We zullen hier veronderstellen dat we minimaal beschikken over 1 realisatie. We hopen dan dat deze realisatie(s) voldoende informatie bevatten om ook de eigenschappen van het stochastisch lichaam te bepalen. De voorwaarde waaronder dit geldt zullen we verder in de tekst formaliseren.

Maar eerst dienen we de realisatiegemiddelden expliciet te definiëren, en de gelijkenis aan te tonen met de lichaamsmomenten.

Definitie. Realisatiegemiddelden zijn gemiddelden die we nemen over de tijd in plaats van over de realisaties. Om het verschil aan te geven, noteren we een tijdsgemiddelde als \mathcal{E} .

We definiëren dan voor elk lichaamsgemiddelde dat we hierboven invoerden een overeenstemmend tijdsgemiddelde

1. Het tijdsgemiddelde wordt genomen over de tijd in de k^{de} realisatie:

$$\mathcal{E}(X^{(k)}(t_0 + t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^{(k)}(t_0 + t) dt \quad (1.27)$$

Bemerk dat dit gemiddelde onafhankelijk is van de oorsprong t_0 . Het uitmiddelen gebeurt uiteindelijk toch over de volledige tijdsas, wat de waarde van t_0 ook is. Om dit aan te tonen beschouwen we de substitutie: $t' = t_0 + t$. Men bekomt dan voor het gemiddelde:

$$\mathcal{E}(X^{(k)}(t_0 + t)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} X^{(k)}(t') dt' = \mathcal{E}(X^{(k)}(t')) \quad (1.28)$$

en deze grootheid is nu onafhankelijk is van de tijdsorsprong t_0 . Fysisch stelt het gemiddelde de DC component van het tijdssignaal voor.

2. Het kwadratisch gemiddelde wordt ook over de tijd genomen voor de k^{de} realisatie:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left(\left[X^{(k)}(t_0 + t) \right]^2 \right) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X^{(k)}(t_0 + t) \right]^2 dt \\ &= \mathcal{E} \left(\left[X^{(k)}(t) \right]^2 \right) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Het kwadratisch gemiddelde van realisatie k hangt ook niet af van de tijdsorsprong. Fysisch stelt het het vermogen van het signaal voor.

3. De autocorrelatiefunctie van een realisatie noteren we $R_{XX}^{(k)}$ om aan te geven dat we slechts 1 realisatie gebruiken

$$\begin{aligned} R_{XX}^{(k)}(t_1 - t_2) &= \mathcal{E} \left(X^{(k)}(t_1 + t) X^{(k)}(t_2 + t) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X^{(k)}(t_1 + t) X^{(k)}(t_2 + t) \right] dt \\ &= R_{XX}^{(k)}(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (1.30)$$

De autocorrelatiefunctie is eveneens onafhankelijk van de tijdsorsprong. Ze hangt enkel af van het gekozen tijdsinterval $t_1 - t_2$. Om de laatste overgang te bewijzen, stellen we dat $t' = t_1 + t$, dan is

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X^{(k)}(t_1 + t) X^{(k)}(t_2 + t) \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X^{(k)}(t') X^{(k)}(t_2 + t' - t_1) \right] dt' \\ &= R_{XX}^{(k)}(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Herhalen we de berekening met de substitutie $t' = t_2 + t$ dan bekommen we

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X^{(k)}(t_1 + t) X^{(k)}(t_2 + t) \right] dt' \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X^{(k)}(t_1 + t' - t_2) X^{(k)}(t') \right] dt' \\ &= R_{XX}^{(k)}(t_1 - t_2) \end{aligned} \quad (1.32)$$

De autocorrelatie is bijgevolg een **even functie** van het tijdsverschil.

De correlatiefunctie is een veralgemening van de autocorrelatiefunctie voor twee verschillende signalen

$$\begin{aligned}
 R_{XY}^{(k)}(t_1 - t_2) &= \mathcal{E} \left(X^{(k)}(t_1 + t) Y^{(k)}(t_2 + t) \right) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X^{(k)}(t_1 + t) Y^{(k)}(t_2 + t) \right] dt \\
 &= R_{XY}^{(k)}(t_2 - t_1)
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

We blijven hier met een probleem zitten. Deze tijdsgemiddelden blijven een stochastisch karakter hebben, en het is dus niet evident dat ze overeenstemmen met de lichaamsmiddelden die we voorheen hebben ingevoerd. Nochtans moet dit het geval zijn als we de lichaamsmiddelden willen bepalen aan de hand van de tijdsgemiddelden.

1.6 Ergodische processen

We kiezen als voorbeeld het lichaamsgemiddelde $E(X(t_1))$ enerzijds, en het tijdsgemiddelde $\mathcal{E}(X^{(k)}(t))$ anderzijds. Vermits de eerste grootheid een constante is en de tweede een stochastisch proces dat varieert over de realisatie k , is het niet evident dat, zelfs in de limiet voor $T \rightarrow \infty$, deze twee grootheden gelijk hoeven te zijn. We zullen dit dus moeten aantonen. Hoe kunnen we nu aantonen dat een stochastische grootheid en een constante gelijk zijn?

Vermits het tijdsgemiddelde een stochastische grootheid is, zullen we een tweestapsprocedure moeten gebruiken:

- We tonen aan dat de verwachtingswaarde van het tijdsgemiddelde, genomen over alle realisaties van het signaal, gelijk is aan het lichaamsgemiddelde:

$$E(X(t_1)) = E \left(\mathcal{E} \left(X^{(k)}(t) \right) \right)$$

Dit is echter niet voldoende om te kunnen zeggen dat het tijdsgemiddelde van één enkele realisatie gelijk is aan het lichaamsgemiddelde.

- We tonen aan dat de variantie van van het tijdsgemiddelde genomen over de realisaties ook nul is.
- Dan weten we dat elke realisatie naar de gemiddelde waarde convergeert, en dus ook dat de gelijkheid geldt voor elke realisatie apart.

Als de tijds- en lichaamsmiddelden gelijk zijn, zeggen we dat het proces ergodisch is.

Definitie 7. Een ergodisch proces is een proces waarvan het lichaamsgemiddelde gelijk is aan het realisatiegemiddelde van elke realisatie.

$$E(X(t)) = \mathcal{E} \left(X^{(k)}(t) \right) \quad \forall k \tag{1.34}$$

Uit één enkele realisatie leidt men in het algemeen geval alleen de realisatiegemiddelden af. Voor ergodische signalen leidt men uit deze enkele realisatie ook de volledige statistische eigenschappen af.

1.6.1 Ergodiciteit van het gemiddelde

Laat ons de twee stappen even uitwerken voor de ergodiciteit van het gemiddelde.

STAP 1: gelijkheid van lichaamsgemiddelde en realisatiegemiddelde

We vertrekken uit de definitie van het tijdsgemiddelde van de k^{de} realisatie van een strikt stationair proces $X(t)$

$$\mu_{X^{(k)}} = \mathcal{E}_T \left(X^{(k)}(t) \right) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X^{(k)}(t_0 + t) dt \quad (1.35)$$

Deze grootheid is nog altijd een random variabele, die verandert van realisatie tot realisatie. Voor het lichaamsgemiddelde gebruiken we de definitie

$$E \left(X^{(k)}(t) \right) = \mu_X(t) \quad (1.36)$$

We veronderstellen dat het proces strikt stationair is, en dan is $\mu_X(t) = \mu_X = C^{te}$. De verwachte waarde van het tijdsgemiddelde over alle realisaties is dan gelijk aan

$$E \left(\mathcal{E}_T \left(X^{(k)}(t) \right) \right) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} E \left\{ X^{(k)}(t_0 + t) \right\} dt = \mu_X \quad (1.37)$$

De eerste voorwaarde is dus al voldaan.

STAP 2: Variantie van het lichaamsgemiddelde

Rest nu om de variantie van het tijdsgemiddelde te bepalen. We gebruiken de volgende eigenschap (1.14)

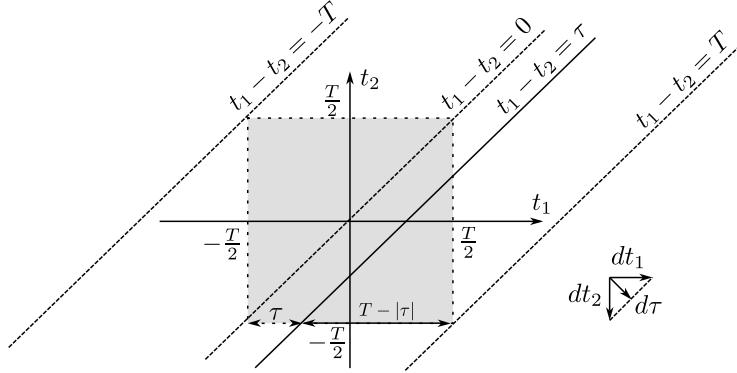
$$\sigma_{XX}^2(t_1, t_2) = \rho_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_X(t_2) \quad (1.38)$$

Omgezet naar het realisatiegemiddelde wordt dit

$$\sigma_{X^{(k)}X^{(k)}}^2(t_1, t_2) = \rho_{X^{(k)}X^{(k)}}(t_1, t_2) - \mu_{X^{(k)}}(t_1) \mu_{X^{(k)}}(t_2) \quad (1.39)$$

We schrijven $\rho_{X^{(k)}X^{(k)}}(t_1, t_2)$ uit als een dubbelintegraal:

$$\begin{aligned} \rho_{X^{(k)}X^{(k)}}(t_1, t_2) &= \mathcal{E}_T \left(X^{(k)}(t_1) X^{(k)}(t_2) \right) \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X^{(k)}(t_1) X^{(k)}(t_2) \right] dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (1.40)$$



Figuur 1.2: Berekenen van de integraal (1.45)

We nemen de verwachtingswaarde over de realisaties van beide leden en vinden

$$E \{ \rho_{X^{(k)} X^{(k)}}(t_1, t_2) \} = \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} E [X^{(k)}(t_1) X^{(k)}(t_2)] dt_1 dt_2 \quad (1.41)$$

Hierin is per definitie $\rho_{XX}(t_1, t_2) = E [X^{(k)}(t_1) X^{(k)}(t_2)]$

$$E \{ \rho_{X^{(k)} X^{(k)}}(t_1, t_2) \} = \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} \rho_{XX}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.42)$$

en we vullen de definitie het verschil van (1.42) en het product van (1.37)

$$\begin{aligned} & E \{ \sigma_{X^{(k)} X^{(k)}}^2(t_1, t_2) \} \\ &= E \left\{ \mathcal{E}_T \left(X^{(k)}(t_1) X^{(k)}(t_2) \right) \right\} - E \left\{ \mathcal{E}_T \left(X^{(k)}(t_1) \right) \right\} E \left\{ \mathcal{E}_T \left(X^{(k)}(t_2) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} \{ \rho_{XX}(t_1, t_2) - \mu_X(t_1) \mu_X(t_2) \} dt_1 dt_2 \end{aligned} \quad (1.43)$$

wat we ook kunnen schrijven als

$$\sigma_{\mathcal{E}_T(X^{(k)}(t))}^2 = \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} \sigma_{XX}^2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.44)$$

Het signaal $X^{(k)}(t)$ is stationair, en dus is $\sigma_{XX}^2(t_1, t_2) = \sigma_{XX}^2(t_1 - t_2)$ enkel functie van het tijdsverschil en niet van het tijdstip waarop de integraal wordt berekend

$$\sigma_{\mathcal{E}_T(X^{(k)}(t))}^2 = \frac{1}{T^2} \int_{-T/2}^{+T/2} \int_{-T/2}^{+T/2} \sigma_{XX}^2(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 \quad (1.45)$$

Rest nu om deze integraal te berekenen. We kunnen hier kiezen voor het brute geweld (en alles berekenen) of eens grafisch gaan bekijken wat de integraal feitelijk betekent zoals in figuur 1.2. We weten een heleboel dingen over deze integraal:

- t_1 en t_2 komen in de integraal enkel voor tussen $-T/2 < t_1, t_2 < T/2$
- $\sigma_{XX}^2(t_1 - t_2) = C^{te}$ als $t_1 - t_2 = \tau = C^{te}$

We gaan dus de integraal uitrekenen over de lijnen van constante $\sigma_{XX}^2(\tau)$ waarde, telkens in de zone $-T/2 < t_1, t_2 < T/2$, zoals is geïllustreerd in figuur 1.2. Voor elke waarde van τ snijdt de rechte $t_1 - t_2 = \tau$ de integratiezone over een afstand $(T - |\tau|)\sqrt{2}$. De differentiaal $d\tau$ is dan gelijk aan $dt_1 = dt_2 = d\tau/\sqrt{2}$ en dus wordt de integraal

$$\sigma_{\mathcal{E}_T(X^{(k)}(t))}^2 = \frac{1}{T^2} \int_{-T}^{+T} (T - |\tau|) \sigma_{XX}^2(\tau) d\tau \quad (1.46)$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \sigma_{XX}^2(\tau) d\tau \quad (1.47)$$

We laten de lengte van het tijdsvenster naar $T \rightarrow \infty$ streven en vinden

$$\sigma_{\mathcal{E}_T(X^{(k)}(t))}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \{\rho_{XX}(\tau) - \mu_X^2\} d\tau \quad (1.48)$$

Deze variantie wordt nul in de limiet indien de correlatiefunctie voldoende snel dempt, vermits we weten dat $\lim_{T \rightarrow \infty} \rho_{XX}(t) = \mu_X^2$. Grofweg komt het er op neer dat de correlatiefunctie sneller dan lineair moet uitdempen.

We kunnen dit resultaat samenvatten in het volgende theorema

Stelling 8. *Het gemiddelde van een stochastisch lichaam is ergodisch,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^{(k)}(t) dt = \mu_X$$

enkel en alleen indien

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \{\rho_{XX}(\tau) - \mu_X^2\} d\tau = 0$$

Bewijs. Zie de vorige berekening. □

1.6.2 Ergodiciteit van de correlatiefunctie

Stelling 9. *De correlatiefunctie van een stochastisch lichaam is ergodisch,*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X^{(k)}(t + \tau) X^{(k)}(t) dt = \rho_{XX}(\tau)$$

enkel en alleen indien

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} \left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right) \left\{ E \left(X^{(k)}(t + \lambda + \tau) X^{(k)}(t + \tau) X^{(k)}(t + \lambda) X^{(k)}(t) \right) - \rho_{XX}^2(\tau) \right\} d\lambda = 0$$

Bewijs. zie [1] □

We merken dus dat we voor de ergodiciteit van het gemiddelde we een voorwaarde hebben op de tweede orde momenten. Voor de ergodiciteit van de autocorrelatie krijgen we al een voorwaarde op de vierde orde momenten van de verdeling.

1.6.3 Voorbeeld 1: stationair en niet ergodisch proces

We zouden kunnen geneigd zijn om te denken dat als het signaal strikt stationair is, het dan ook automatisch ergodisch is. Dit is echter niet het geval als we naar de bovenstaande stellingen kijken.

We geven nu een tegenvoorbeeld van een signaal dat stationair en toch niet ergodisch is. Beschouw $Y(t) = X(t) + Z$, waar

- $X(t)$ een stationair ergodisch signaal is, met lichaamsgemiddelde μ_X
- Z een stochastische variabele met lichaamsgemiddelde $E(Z) = \zeta_0$

Dit proces is inderdaad stationair maar niet ergodisch in de gemiddelde waarde. We berekenen het gemiddelde van het proces. Beschouw eerst het lichaamsgemiddelde

$$\begin{aligned} E(Y(t)) &= E(X(t) + Z) = E(X(t)) + E(Z) \\ &= \mu_X + \zeta_0 \end{aligned}$$

Voor de realisatiegemiddelden moeten we de tijdsgemiddelden berekenen

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(Y^{(k)}(t)) &= \mathcal{E}(X^{(k)}(t) + Z) = \mathcal{E}(X^{(k)}(t)) + Z \\ &= \xi_0 + Z \end{aligned}$$

wegens ergodiciteit van X . Het gevolg hiervan is dat het proces enkel ergodisch is als $Z = E(Z) = C^{te}$, en dus geen stochastische variabele meer is.

1.6.4 Voorbeeld 2: niet stationair en ergodisch proces

We zullen nu een niet-stationair proces $Y(t)$ invoeren, dat toch nog steeds ergodisch is $Y(t) = X(t) \cos(\omega_0 t)$. Hierin is $X(t)$ een stationair, ergodisch proces met gemiddelde 0 Dit proces bestaat ook in de realiteit en beschrijft de ruis aan de uitgang van een mixer.

We gaan eerst na of het proces stationair is.

Beschouw hiertoe het gemiddelde $E(Y(t))$ en $E(Y(t + \tau))$

$$\begin{aligned} E(Y(t)) &= E(X(t) \cos(\omega_0 t)) \\ &= E(X(t)) \cos(\omega_0 t) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}
E(Y(t+\tau)) &= E(X(t+\tau) \cos(\omega_0 t)) \\
&= E(X(t) \cos(\omega_0 t)) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Het proces is dus stationair voor het gemiddelde

Dan gaan we na of het proces stationair is ten opzichte van de correlatie (het tweede orde moment)

$$\begin{aligned}
E(Y(t)Y(t+\tau)) &= E(X(t) \cos(\omega_0 t) X(t+\tau) \cos(\omega_0(t+\tau))) \\
&= E(X(t)X(t+\tau)) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_0(t+\tau)) \\
&= \rho_{XX}(\tau) + \frac{1}{2} [\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau)]
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Het proces is dus niet stationair ten opzicht van het tweede orde moment en is dus niet strikt stationair

We gaan dan na of het proces ergodisch is

We hebben het lichaamsgemiddelde eerder berekend om de stationariteit (of het gebrek eraan) aan te tonen in (1.49). Rest nu nog om het tijdsgemiddelde van een realisatie te berekenen:

$$\begin{aligned}
E\left[\mathcal{E}\left(Y\left({}^{(k)}t\right)\right)\right] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} E\left(X^{(k)}(t) \cos(\omega_0 t)\right) dt \\
&= 0
\end{aligned}$$

omdat $X^{(k)}(t)$ gemiddelde nul heeft. Het signaal is dus ergodisch in het gemiddelde, maar niet strikt stationair.

Bibliografie

[Papoulis] Papoulis, "Probability, Random Variables, and Stochastic Processes",
Mc-Graw Hill, Kogakusha, 1981

Hoofdstuk 2

Spectrum van een ruissignaal

2.1 Theorema van Wiener-Kinchin

Het spectrum bepalen van deterministische signalen heeft ons al een paar keer uit de nood geholpen. Kunnen we deze **spectrale analyse** ook uitbreiden naar ruissignalen?

We hebben de Fourier integraal gebruikt om het spectrum te berekenen van deterministische signalen. Het probleem is dat deze techniek niet zo maar toegepast kan worden op stochastische signalen: over het algemeen wordt er voor een stochastisch signaal niet voldaan aan de bestaansvoorwaarde van de Fourier integraal. Een stochastisch signaal is inderdaad in het algemeen niet kwadratisch integreerbaar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X^{(k)}(t)|^2 dt = \infty \quad (2.1)$$

en dus bestaat de Fourier integraal niet.

We hebben dit probleem eerder ontmoet bij de bepaling van het Fourier spectrum van een periodiek signaal. Om dit op te lossen hebben we gebruik gemaakt van de periodiciteit van het signaal en hebben we de Dirac distributie ingevoerd om het spectrum van een periodiek signaal voor te stellen.

Ook voor de stochastische signalen zullen we het Fourier spectrum invoeren via een omweg. De techniek die we hier zullen gebruiken is om het stochastisch signaal te karakteriseren aan de hand van een deterministische grootte: de autocorrelatiefunctie $\rho_{XX}(\tau)$

2.1.1 Wiener-Kinchin: Fourier getransformeerde van $\rho_{XX}(\tau)$

Definitie. De power spectral density (PSD) $\Sigma_X(f)$ van een stochastisch lichaam X is de Fourier getransformeerde van de autocorrelatiefunctie $\rho_{XX}(\tau)$

van het stochastisch lichaam

$$\begin{aligned}\Sigma_X(f) &\triangleq \mathcal{F}(\rho_{XX}(\tau)) \\ \rho_{XX}(\tau) &\triangleq \mathcal{F}^{-1}(\Sigma_X(f))\end{aligned}\quad (2.2)$$

Vermits de correlatiefunctie een even functie is, weten we ook dat het imaginair deel van het spectrum zelftoegevoegd moet zijn

$$\Sigma_X(f) = \Sigma_X^*(-f) \quad (2.3)$$

We mogen in de Fourier getransformeerde de integratiegrenzen dus herleiden tot $[0, \infty]$ en de integrand dan vervangen door het dubbel van zijn reëel deel,

$$\begin{aligned}\Sigma_X(f) &= 2 \int_0^{+\infty} \rho_{XX}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau \\ \rho_{XX}(\tau) &= 2 \int_0^{+\infty} \Sigma_X(f) \cos(2\pi f\tau) df\end{aligned}\quad (2.4)$$

Deze relaties hebben een speciale naam gekregen. Ze gaan door het leven als **het theorema van Wiener-Kinchin** voor stochastische processen.

2.1.2 Wiener Kinchin en ergodiciteit

Voor ergodische signalen is per definitie het lichaamsgemiddelde gelijk aan het realisatiegemiddelde: de relaties van Wiener-Kinchin moeten dus ook daar gelden, als we voor ergodische signalen de lichaamsrelatie $\rho_{XX}(\tau)$ vervangen door de tijdsrelatie $R_{XX}(\tau)$ en de power spectral density van het lichaam $\Sigma_X(f)$ vervangen door het overeenstemmende tijds-gemiddelde $S_{XX}(f)$.

De relaties van Wiener-Kinchin worden dan:

$$\begin{aligned}S_{XX}(f) &\triangleq \mathcal{F}(R_{XX}(\tau)) \\ R_{XX}(\tau) &\triangleq \mathcal{F}^{-1}(S_{XX}(f))\end{aligned}\quad (2.5)$$

2.1.3 Hoe maken we dit bruikbaar?

De tijds-gemiddelden die we in de vorige vergelijking terugvinden zijn de gemiddelden genomen over een oneindig lang meetvenster. Praktisch gezien kunnen we deze grootheden dus nooit anders dan puur theoretisch gaan bepalen, en dat zint ons helemaal niet.

Om de correlatiefuncties praktisch toegankelijk te maken, gaan we een tijdsvenster invoeren dat het oneindig lange tijds-sig-naal venstert over een eindige tijd T . We kiezen voor een rechthoekig tijdsvenster $w(t)$ met een lengte $t = T$, dat symmetrisch geplaatst ten opzichte van de tijds-oorsprong en er mathematisch als volgt uitziet:

$$w_T(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \frac{T}{2} < t < -\frac{T}{2} \\ \frac{1}{2} & t = \pm \frac{T}{2} \end{cases}\quad (2.6)$$

Hierdoor blijft de Fourier integraal eindig en kunnen we het spectrum berekenen. Merk op dat bij een overgang naar het spectrale domein hier dan ook alle problemen van spectrale leakage zullen optreden. We hebben deze eerder in detail bestudeerd.

De correlatiefunctie van het gevensterde signaal $X_T^{(k)}(t) = X^{(k)}(t) w_T(t)$ is dan een stochastische variabele die in het tijdsdomein wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} R_{X,T}^{(k)}(\tau) &= \mathcal{E} \left(X_T^{(k)}(\tau+t) X_T^{(k)}(t) \right) \\ &= \lim_{T_i \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T_i/2}^{+T_i/2} \left[X_T^{(k)}(\tau+t) X_T^{(k)}(t) \right] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X_T^{(k)}(\tau+t) X_T^{(k)}(t) \right] dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

We zullen nu proberen om het verband tussen dit vermogen en het vermogenspectrum $S_{XX}(f)$ te bepalen.

2.1.4 Het vermogen bepalen in het frequentiedomein

We berekenen nu de Fourier integraal voor elke realisatie van het gevensterd signaal $X_T^{(k)}(t) = X^{(k)}(t) w_T(t)$. Elke realisatie van het gevensterde signaal heeft een eindig vermogen over een eindig tijdsvenster: de Fourier getransformeerde van $X_T^{(k)}(t)$ bestaat dus en is gelijk aan

$$\begin{aligned} X_T^{(k)}(f) &= \mathcal{F} \left(X_T^{(k)}(t) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{(k)}(t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} X^{(k)}(t) e^{-j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

Let op: dit spectrum is nog steeds een stochastische variabele. We berekenen dan het vermogenspectrum $S_T^{(k)}(f)$ van de k^{de} realisatie. We vertrekken van de uitdrukking voor het vermogen (2.7) in het tijdsdomein,

$$S_{X,T}^{(k)}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(R_{X,T}^{(k)}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} \right) d\tau \quad (2.9)$$

We vervangen nu de tijdsbepaalde correlatiefunctie door de uitdrukking die we eerder bekwamen, en vinden

$$\begin{aligned} S_{X,T}^{(k)}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left[X_T^{(k)}(\tau+t) X_T^{(k)}(t) \right] dt \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X_T^{(k)}(t) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} X_T^{(k)}(\tau+t) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \right\} dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

De binnenste integraal is nu een Fourier integraal van een tijdsverschoven signaal. We weten dan dat we deze integraal ook kunnen herschrijven als

$$\mathcal{F}\left(X_T^{(k)}(\tau+t)\right) = \mathcal{F}\left(X_T^{(k)}(t)\right) e^{j2\pi ft} \quad (2.11)$$

We vervangen dit in de binnenste integraal en bekomen

$$\begin{aligned} S_{X,T}^{(k)}(f) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} X_T^{(k)}(t) \left\{ \mathcal{F}\left(X_T^{(k)}(t)\right) \right\} e^{j2\pi ft} dt \\ &= \frac{1}{T} \left\{ \mathcal{F}\left(X_T^{(k)}(t)\right) \right\} \int_{-T/2}^{+T/2} X_T^{(k)}(t) e^{j2\pi ft} dt \end{aligned} \quad (2.12)$$

De laatste integraal lijkt op een Fourier getransformeerde, maar het teken van de exponentiële is omgekeerd. Om hier aan uit te geraken, nemen we de complex toegevoegde van het Fourier spectrum en schrijven daarvoor de Fourier integraal uit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(X_T^{(k)}(t)\right)^* &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(X_T^{(k)}(t) e^{-j2\pi ft}\right)^* d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(X_T^{(k)}(t)\right)^* e^{j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vermits het signaal reëel is, is dit ook gelijk aan de integraal die we in 2.12 bekwamen, en dus is

$$S_{X,T}^{(k)}(f) = \frac{1}{T} \left\{ \mathcal{F}\left(X_T^{(k)}(t)\right) \right\} \left\{ \mathcal{F}\left(X_T^{(k)}(t)\right) \right\}^* \quad (2.14)$$

We definiëren de **periodogram** $S_{X,T}^{(k)}(f)$ als de densiteit van het vermogen over de frequentie voor 1 realisatie

$$S_{X,T}^{(k)}(f) = \frac{\left\| X_T^{(k)}(f) \right\|^2}{T} \quad (2.15)$$

Dit periodogram is een stochastische functie, aangezien ze een verschillende waarde aanneemt voor elke gekozen realisatie (k) van het signaal $X_T^{(k)}(t)$. Uiteraard bevat deze uitdrukking geen informatie over de fase van het signaal (de norm is een reële functie).

Het vermogen $P_{X,T}^{(k)}$ van het gegevensterd signaal is gelijk aan de integraal van de vermogen dichtheid over de frequentie:

$$P_{X,T}^{(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{X,T}^{(k)}(f) df \quad (2.16)$$

Wat we nog moeten bepalen is het verband tussen het vermogen van het gegevensterd signaal en het vermogen van het origineel signaal, dat wordt berekend

over een oneindig lang tijdsvenster. Om dit te bepalen nemen we de limiet van het vermogen voor een tijdsvenster waarvan de lengte naar oneindig neigt:

$$P_X^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} P_{X,T}^{(k)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{X,T}^{(k)}(f) df \quad (2.17)$$

Als deze integraal bestaat, dan convergeert het gevensterd vermogen naar het echte vermogen van de k^{de} realisatie.

2.1.5 Van $S_{X,T}^{(k)}(f)$ naar $S_{XX}(f)$

Om de overgang correct uit te rekenen tussen de PSD van 1 realisatie over een eindig tijdsvenster naar de verwachte waarde van de PSD over alle realisaties en een oneindig lang tijdsvenster, zullen we de voorwaarde bepalen die de convergentie van $E\left(S_{X,T}^{(k)}(f)\right)$ (de verwachte waarde van het periodogram) naar $S_{XX}(f)$ (de power spectral density bekomen als een tijdsgemiddelde) bepalen. Dit leidt tot de volgende stelling.

Stelling 10. *Als*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau R(\tau)| d\tau < \infty$$

dan convergeert de verwachte waarde van het vermogen over het tijdsvenster naar het tijdsgemiddelde van de power spectral density als het venster neigt naar een oneindige lengte

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ S_{X,T}^{(k)} \right\} = S_{XX}(f)$$

Bewijs. Zie [1] p. 343-345. □

Wat kunnen we uit deze stelling leren? Als de correlatiefunctie van het signaal sneller dan lineair afneemt met het tijdsverschil, dan zal de voorwaarde voldaan zijn en mogen we het powerspectrum bepalen door het het tijdsgemiddelde van het power spectrum van het gevensterde signaal uit te middelen over een aantal realisaties, zoals we in de volgende paragraaf zullen doen. Praktisch is de voorwaarde veelal voldaan, en wordt er dikwijls vergeten om ze te controleren (wat soms tot problemen leidt).

2.2 Het periodogram als schatter voor het lichaams-gemiddelde $\Sigma_X(f)$

Om de spectrale eigenschappen van een stochastisch lichaam te bepalen, moeten we de theoretische power spectral density $\Sigma_X(f)$ bepalen, die gedefinieerd is als

$$\Sigma_X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \rho_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.18)$$

Hierin is de functie $\Sigma_X(f)$ een theoretisch concept. Deze deterministische functie kan in de praktijk niet opgemeten worden, omdat het onmogelijk is om de verwachtingswaarde over het stochastisch lichaam te meten.

Als we stellen dat het signaal ergodisch is, mogen we het realisatiegemiddelde vervangen door het tijdsgemiddelde en dit brengt ons al een stap dicht bij een meetbare grootheid, omdat we nu enkel een integraal over de tijd moeten berekenen:

$$\Sigma_X(f) = S_{XX}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (2.19)$$

Dit betekent wel dat we het signaal gedurende een oneindig lange tijd moeten meten. Ook dat is niet realiseerbaar, en dus moeten we nog verder vereenvoudigen.

Het periodogram kunnen we wel meten, omdat nu het tijdsvenster eindig wordt. De vorige stelling toont dat het gemiddelde van het periodogram over alle realisaties convergeert naar de power spectral density, als we het tijdsvenster maar lang genoeg maken. Om dit in de theorie aan te tonen, moeten we de limiet nemen voor $T \rightarrow \infty$:

$$S_{XX}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ S_{X,T}^{(k)} \right\} \quad (2.20)$$

2.3 $\Sigma_X(f)$ meten met het periodogram

Praktisch gezien zal een eindige waarde van T voldoen, als ze maar groot genoeg is ten opzichte van de snelheid waarmee de correlatiefunctie van het signaal dempt. Indien het waargenomen signaal **stationair en ergodisch** is, bekomen we een (goede) benadering van $\Sigma_X(f)$ door

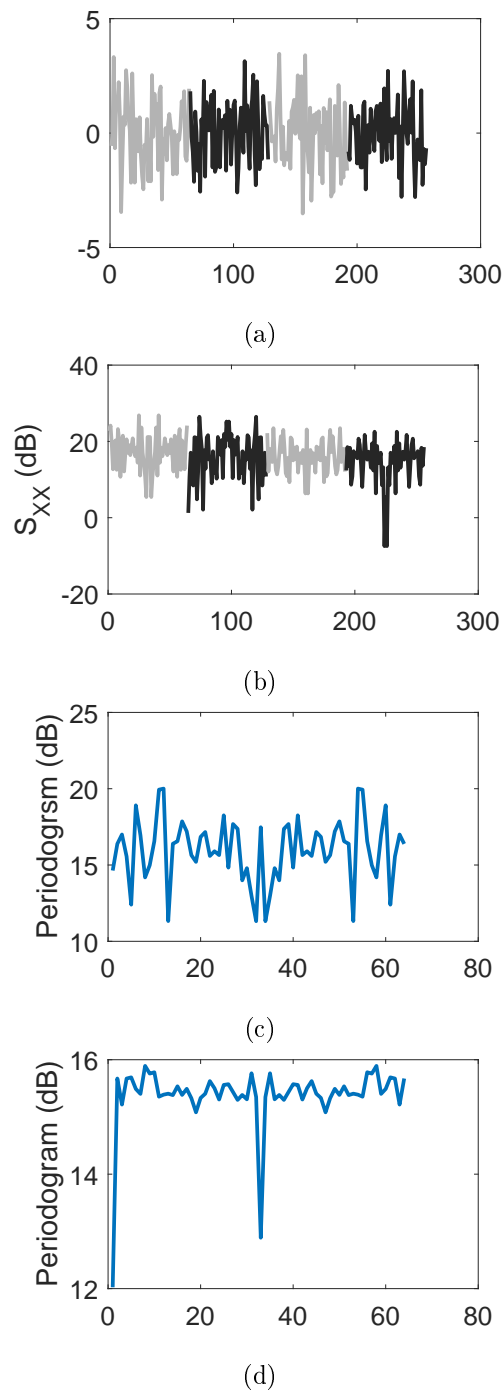
- de meettijd T groot genoeg te kiezen om zeker te zijn dat de correlatiefunctie voldoende sterk is uitgedempt
- een aantal realisaties van het periodogram uit te middelen om de variabiliteit van het periodogram te verminderen.

We bekomen die realisaties door het signaal meerdere malen op te meten, telkens gedurende een tijdsinterval met breedte T dat start op verschillende tijdstippen $t = t_k$. Zo berekent de klassieke Fourier integraal (of de discrete Fourier getransformeerde voor discrete signalen) de nodige spectrale informatie.

Figuur 2.1 schetst het verloop van de berekening van het periodogram. We meten eerst een aantal (N) gevensterde tijdssignalen $X_T^{(k)}(t)$. Voor elk gevensterd signaal $X_T^{(k)}(t)$ berekenen we de Fourier getransformeerde $X_T^{(k)}(f)$. Dan gaat men voor elk gevensterd signaal de PSD berekenen als volgt

$$S_{X,T}^{(k)}(f) = \frac{\|X_T^{(k)}(f)\|^2}{T} \quad (2.21)$$

We merken dat de variabiliteit van het periodogram zeer groot is: de waardes schommelen over meer dan 30 dB. We middelen dan de N realisaties van het periodogram uit. Het uitgemiddelde periodogram $P_{X,N}(f)$ heeft dan een kleinere



Figuur 2.1: Schematische opbouw van het periodogram als een sample gemiddelde. (a): 4 gevensterde realisaties bekomen uit 1 realisatie van het stochastisch lichaam. (b): 4 vermogensspectra bekomen uit de realisaties geven 4 periodogrammen zonder uitmiddeling. (c): het periodogram uitgemiddeld over 4 gevensterde realisaties. (d) het periodogram bekomen door het uitmiddelen van 1024 gevensterde realisaties. Let op de schaal van de Y-as!

variabiliteit:

$$P_{X,N}(f) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_{X,T}^{(k)}(f) \quad (2.22)$$

Als we uitmiddelen over 4 realisaties merken we zoals verwacht (denk aan de \sqrt{N} wet) slechts een kleine afname van de variabiliteit (zie (c) op figuur 2.1). Om te zien als de convergentie wel degelijk gebeurt, hebben we het periodogram ook berekend voor $N = 1024$ gevensterde realisaties. Bemerkt dat de variabiliteit wel degelijk afneemt volgens de \sqrt{N} wet, maar dat dit wel een trage convergentie inhoudt.

In het voorbeeld van de figuur overlappen de intervallen mekaar niet (soms laat men ze wel overlappen, en dan zelfs tot 50% overlap voor een niet-rechthoekig venster).

2.3.1 Alternatieve methode: gebruik Wiener-Kinchin

De alternatieve methode om dit resultaat af te leiden wordt bekomen door gebruik te maken van de stelling van Wiener-Kinchin. Hiertoe moeten we dan eerst de autocorrelatiefunctie $R_{XX}(t)$ berekenen (in het tijdsdomein) om vervolgens de PSD af te leiden via de Fourier integraal:

$$S_{X,T}(f) = \mathcal{F}(R_{XX}(\tau)) \quad (2.23)$$

2.4 Eigenschappen van de autocorrelatiefunctie van ruissignalen

We onderstellen hier dat het signaal geen deterministische componenten heeft. Voor ergodische signalen is de autocorrelatiefunctie van 1 realisatie gelijk aan de autocorrelatie van het stochastisch lichaam, m.a.w.

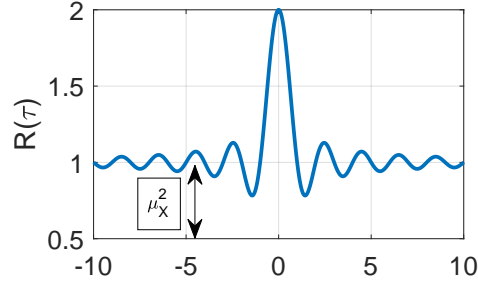
$$\rho_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) \quad (2.24)$$

We zullen nu voor deze zuivere ruissignalen de eindwaarden van de correlatiefunctie berekenen.

2.4.1 Waarde van de correlatiefunctie voor $\tau \rightarrow \infty$

Algemeen zal de onderlinge afhankelijkheid van de stochastische variabelen $X(t_1)$ en $X(t_2)$ afnemen als het tijdsverschil $\tau = t_1 - t_2$ toeneemt. Voor waarden van τ die zeer (∞) groot worden kunnen we veilig aannemen dat $X(t_1)$ en $X(t_2)$ stochastisch onafhankelijk worden.

Bij een theoretische analyse nemen we het geïdealiseerde geval dat $\tau \rightarrow \infty$ om zeker te zijn dat $X(t_1)$ en $X(t_2)$ onafhankelijk zijn. De waarde van de correlatiefunctie bekomen we door de definitie van het lichaamsgemiddelde te



Figuur 2.2: De correlatiefunctie $\rho_{XX}(\tau)$ convergeert als een functie van τ niet noodzakelijk uniform naar de asymptotische waarde voor $|\tau| \rightarrow \infty$.

gebruiken:

$$\rho_{XX}(t_1 - t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = E(X(t_1))E(X(t_2)) = \mu_X^2 \quad \text{voor } \tau \rightarrow \infty \quad (2.25)$$

Hierin stelt μ_X het gemiddelde voor van $X(t)$. De asymptotische waarde van de correlatie voor een $\tau \rightarrow \infty$ bedraagt dus:

$$\boxed{\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_{XX}(\tau) = \mu_X^2} \quad \text{of nog } \mu_X = \sqrt{\rho_{XX}(\infty)} \quad (2.26)$$

Als τ naar oneindig neigt zal $R_{XX}(\tau)$ asymptotisch naar μ^2 neigen. In het voorbeeld van figuur 2.2 merken we dat de convergentie niet uniform is: de functie oscilleert rond de eindwaarde.

2.4.2 Waarde van de autocorrelatiefunctie van een ruis-signaal voor $\tau = 0$

We evalueren de autocorrelatie in het speciaal geval dat $\tau = 0$. We vertrekken van de definitie van de lichaamscorrelatiefunctie:

$$\rho_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_X(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.27)$$

We evalueren deze functie nu in $\tau = 0$ en bekomen

$$\rho_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_X(f) e^{j2\pi f \cdot 0} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma_X(f) df = P_X \quad (2.28)$$

met P_X het echte (niet stochastische) vermogen van het signaal. De waarde van de autocorrelatie voor $\tau = 0$ is dus het vermogen van het signaal:

$$\boxed{\rho_{XX}(0) = E(X^2(t)) = P_X} \quad (2.29)$$

2.4.3 Verband tussen autocorrelatie en variantie van een ruis signaal

We vertrekken van de definitie van de variantie

$$\sigma_X^2 = E \left(\{X(t) - E(X(t))\}^2 \right) = E(X^2(t)) - \{E(X(t))\}^2$$

en substitueren de definitie van de correlatiefunctie voor een vertraging $\tau = 0$ en $\tau = \infty$ en bekomen:

$$\sigma_X^2 = \rho_{XX}(0) - \rho_{XX}(\infty)$$

De autocorrelatie kan bijgevolg aangewend worden om de variantie van een stochastisch signaal, bv. een ruisbron, te meten.

2.4.4 De autocorrelatie is een even functie van τ

Dit volgt rechtstreeks uit de definitie van de correlatiefunctie.

$$\rho_{XX}(\tau) = \rho_{XX}(-\tau) \quad (2.30)$$

2.4.5 Voor een stationair proces is $|\rho_{XX}(\tau)| < \rho_{XX}(0)$

Stelling 11. *voor een stationair ergodisch proces kan de waarde van de autocorrelatiefunctie in de oorsprong $\rho_{XX}(0)$ nooit overschreden worden:*

$$|\rho_{XX}(\tau)| \leq \rho_{XX}(0) \quad \forall \tau \neq 0 \quad (2.31)$$

Bewijs. We berekenen $\rho_{XX}(0) - |\rho_{XX}(\tau)|$. We moeten de absolute waarde zien weg te krijgen. We laten ze wegvallen als volgt:

$$\begin{aligned} \rho_{XX}(0) - |\rho_{XX}(\tau)| &= \begin{cases} \rho_{XX}(0) - \rho_{XX}(\tau) & \rho_{XX}(\tau) \geq 0 \\ \rho_{XX}(0) + \rho_{XX}(\tau) & \rho_{XX}(\tau) \leq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2(\rho_{XX}(0) - \rho_{XX}(\tau)) & \rho_{XX}(\tau) \geq 0 \\ 2(\rho_{XX}(0) + \rho_{XX}(\tau)) & \rho_{XX}(\tau) \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

We substitueren de definitie van de correlatiefunctie

$$\rho_{XX}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) \quad (2.32)$$

en de waarde van de correlatiefunctie voor $\tau = 0$, rekening houdend met de stationariteit van het signaal,

$$\rho_{XX}(0) = P_X = E(X^2(t)) = E(X^2(t+\tau)) \quad (2.33)$$

in de linkerleden van de originele ongelijkheden:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2E(X(t)X(t+\tau)) + E(X^2(t)) + E(X^2(t+\tau)) \\ -2E(X(t)X(t+\tau)) + E(X^2(t)) + E(X^2(t+\tau)) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} E(\{X(t) + X(t+\tau)\}^2) \geq 0 \\ E(\{X(t) - X(t+\tau)\}^2) \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

waaruit blijkt dat de linkerleden steeds positief zijn, en dus moet

$$|\rho_{XX}(\tau)| \leq \rho_{XX}(0) \quad (2.34)$$

□

2.5 Eigenschappen van de autocorrelatiefunctie van deterministische signalen

2.5.1 De autocorrelatie van een periodiek signaal is periodiek met dezelfde periode

De autocorrelatie functie kan ook berekend worden voor elk deterministisch of mixed signaal. Men zal nu de autocorrelatie berekenen voor een periodiek signaal $X(t)$ met periode T .

$$X(t+kT) = X(t) \quad (2.35)$$

Stelling 12. *De autocorrelatie een periodieke functie zelf een periodieke functie is met dezelfde periode.*

Bewijs. Onderstel dat de functie $X(t)$ een periodieke functie is met periode T , dan weten we dat $X(t+kT) = X(t)$ met $k \in \mathbb{Z}$. De eigenschappen van dit signaal zijn:

- Het signaal is stationair: De lichaamsmiddelen veranderen niet als functie van de tijd t .
- Het signaal is ergodisch: De lichaamsmiddelen en de tijdsgemiddelden zijn gelijk.

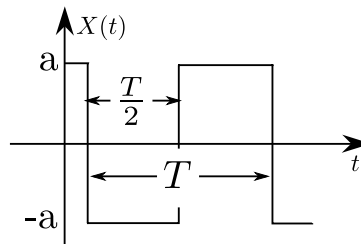
We mogen dus de autocorrelatie van het signaal bepalen door het tijdsgemiddelde te berekenen, en daar blindelings de definitie toe te passen

$$R_{XX}(\tau) = E(X(t)X(t+\tau)) \quad (2.36)$$

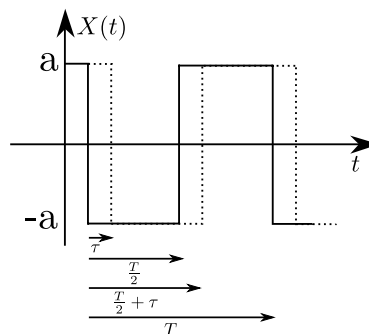
We berekenen nu de autocorrelatie op een tijdstip $\tau' = \tau + kT$ met $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau') &= E(X(t)X(t+\tau+kT)) \\ &= E(X(t)X(t+\tau)) \\ &= R_{XX}(\tau) \end{aligned} \quad (2.37)$$

De autocorrelatie heeft dus inderdaad een periode T □



Figuur 2.3: De periodieke symmetrische blokgolf die we hier beschouwen



Figuur 2.4: Het oorspronkelijk en het verschoven signaal

2.5.2 Voorbeeld: Autocorrelatie van een symmetrische blokgolf

Het signaal wordt grafisch weergegeven op figuur 2.3, terwijl de vergelijkingen hieronder worden gegeven

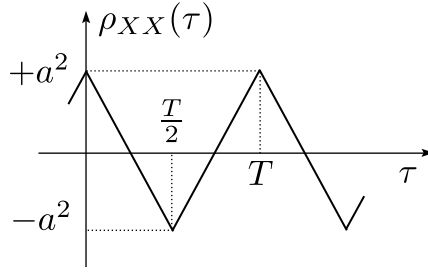
$$\begin{cases} X(t) = a & t_0 + kT \leq t \leq t_0 + (2k+1)\frac{T}{2} \\ X(t) = -a & t_0 + (2k+1)\frac{T}{2} \leq t \leq t_0 + kT \end{cases} \quad (2.38)$$

We zullen nu de autocorrelatie van het signaal bepalen.

- Het oorspronkelijk signaal wordt over een tijd τ verschoven zoals in figuur 2.4.
- Dan wordt het product van de twee signalen berekend
- Tenslotte wordt dat product uitgemiddeld.

Het resultaat van de operatie wordt in de figuur 2.5 voorgesteld. Men ziet hier onmiddellijk dat de autocorrelatie ook periodiek is met dezelfde periode als het originele signaal.

We kunnen dit nu ook berekenen, door de integraal op te delen in 4 zones al naar gelang de relatieve waarde van de twee verschoven signalen $[-a, a] +$



Figuur 2.5: De autocorrelatie functie van een symmetrisch periodiek blokvormig signaal.

$[-a, -a] + [a, -a] + [a, a]$:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^\tau X(t) X(t+\tau) dt + \int_\tau^{\frac{T}{2}} \dots dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} \dots dt + \int_{\frac{T}{2}+\tau}^T \dots dt \right\} \quad (2.39)$$

Uit figuur 2.4 bepalen we het product van de verschoven functies in elk onderdeel en vinden in het geval dat we $|\tau| < T/2$

$$\begin{aligned} R_{XX}(\tau) &= \frac{1}{T} \left\{ \int_0^\tau [-a^2] dt + \int_\tau^{\frac{T}{2}} [a^2] dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}+\tau} [-a^2] dt + \int_{\frac{T}{2}+\tau}^T [a^2] dt \right\} \\ &= \frac{1}{T} \left\{ (-a^2)\tau + (a^2) \left[\frac{T}{2} - \tau \right] + (-a^2) \left[\frac{T}{2} + \tau - \frac{T}{2} \right] + (a^2) \left[T - \frac{T}{2} - \tau \right] \right\} \\ &= \frac{1}{T} \{-4a^2\tau + a^2T\} = a^2 \left\{ 1 - \frac{4\tau}{T} \right\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

We kunnen dat dan herhalen voor $T/2 < |\tau| < T$ en vinden

$$R_{XX}(\tau) = -a^2 \left\{ 1 - \frac{4\tau}{T} \right\} \quad (2.41)$$

Na een verschuiving over een periode $\tau = T$ vinden we dezelfde uitdrukking terug als hierboven: de functie is dus wel degelijk periodiek, en wordt grafisch weergegeven in figuur 2.5.

Oefening. Als oefening berekenen we de autocorrelatie berekenen van enkele deterministische signalen. Voor de sinusfunctie:

$$X(t) = A \sin(2\pi ft) \quad (2.42)$$

wordt de correlatiefunctie

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f\tau) \quad \left| \tau < \frac{T}{2} \right| \quad (2.43)$$

De autocorrelatie is opnieuw een periodieke functie waarvan de periode gelijk aan de periode van het originele signaal.

Bibliografie

- [1] A. Papoulis: *“Probability, Random Variables and Stochastic processes”*,
McGraw-Hill International, 1981

Hoofdstuk 3

FRF voor ruizige excitaties

3.1 Transferfunctie van een LTI: van definitiere- latie tot meting.

We zullen er nu van uitgaan dat signalen $u(t)$ en $y(t)$ overeenstemmend met ingang en de uitgangssignaal van de DUT beschikbaar zijn. We zullen uitgaan van de definitie van de transferfunctie voor het geval van een continue tijdsvariabele t :

$$y(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau \quad (3.1)$$

waar $h(\tau)$ de impulsrespons van het LTI systeem voorstelt en er verondersteld wordt dat de input nul is voor negatieve tijden:

$$u(t) = 0 \quad t < 0 \quad (3.2)$$

Deze relatie is voldoende om het gedrag van het LTI systeem te voorspellen voor een willekeurige excitatie. Praktisch gezien is de relatie echter niet zo eenvoudig te gebruiken om de impulsrespons te berekenen, aangezien de convolutie een ingewikkelde operatie is in het algemeen geval. Er bestaan echter 2 speciale gevallen waarin de relatie eenvoudig genoeg wordt om ook praktisch bruikbaar te worden: periodieke excitatie en witte ruis excitatie.

3.1.1 Periodieke excitatie: spectrale voorstelling.

Wanneer we beschouwen dat

- het aangelegde signaal een periodiek signaal is
- de metingen worden uitgevoerd voor een systeem in regime

kunnen we de Fourier transformatie benutten om de convolutie relatie om te zetten in een product:

$$Y(f) = H(f)U(f) \quad (3.3)$$

Hierin stellen $X(\omega)$ en $Y(\omega)$ de DFT spectra voor van het ingangs- en uitgangssignaal van de DUT. Dit levert een eenvoudig bruikbare uitdrukking voor de berekening van de transferfunctie:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{U(f)} \quad (3.4)$$

Deze formule is evenwel enkel geldig wanneer de spectra van in- en output signaal bestaan. Vermits we hier zelf de vrije keuze hebben over de vorm van de excitatie kunnen we daar wel voor zorgen. Voor alle periodieke signalen is dit het geval onder zeer ruime voorwaarden.

3.1.2 Random excitatie: correlatietechnieken.

In het geval van een ruisexcitatie hebben we een probleem. Vermits de signalen $U^{(k)}(t)$ en dus ook $Y^{(k)}(t)$ random signalen zijn, bestaan de spectra $U^{(k)}(f)$ en $Y^{(k)}(f)$ niet. Een gevolg daarvan is dat de frequentierespons $H(f)$ zoals voorheen is gedefinieerd dus ook NIET bestaat wanneer we een RANDOM excitatie gebruiken.

Om toch de FRF te kunnen invoeren op een theoretisch sluitende manier, moeten we er voor zorgen dat we de random signalen kunnen beschrijven met een deterministische beschrijving, waaruit we dan toch de FRF kunnen afleiden. Als we bovendien veronderstellen dat de stochastische processen ergodisch en strikt stationair zijn, dan vinden we

$$\begin{aligned} \rho_{UY}(\tau) &= R_{UY}^{(k)}(\tau) = \mathcal{E} \left(Y^{(k)}(t) U^{(k)}(t + \tau) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T Y^{(k)}(t + \tau) U^{(k)}(t) dt \right\} \\ \rho_{UU}(\tau) &= R_{UU}^{(k)}(\tau) = \mathcal{E} \left(U^{(k)}(t) U^{(k)}(t + \tau) \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T U^{(k)}(t + \tau) U^{(k)}(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Waarin 1 enkele realisatie van de stochastische lichamen voorkomt. Substitueren we nu de LTI relatie in de definitie van de crosscorrelatie:

$$\begin{aligned} R_{UY}^{(k)}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T U^{(k)}(t + \tau) Y^{(k)}(t) dt \right\} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T U^{(k)}(t - \tau) \left\{ \int_0^t h(\nu) U^{(k)}(t - \nu) d\nu \right\} dt \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

We gaan nu de integratievolgorde verwisselen. Hiertoe gaan we eerst de binnen-

ste integraal vaste grenzen geven. Uit de definitie weten we dat:

$$\begin{aligned} \{h(\nu) = 0 \text{ voor } \nu < 0\} &\Rightarrow \int_{-\infty}^0 h(\nu) u(t - \nu) d\nu = 0 \\ \{u(t) = 0 \text{ voor } t < 0\} &\Rightarrow \int_t^{\infty} h(\nu) u(t - \nu) d\nu = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

En dus kunnen de grenzen van de convolutie integraal worden uitgebreid:

$$\begin{aligned} R_{UY}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T U^{(k)}(t - \tau) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) U^{(k)}(t - \nu) d\nu \right\} dt \right\} \\ &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_0^T U^{(k)}(t - \tau) U^{(k)}(t - \nu) dt \right\} d\nu \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Substitutie van variabelen $r = t - \nu$:

$$\begin{aligned} R_{UY}(\tau) &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \int_{-\nu}^{T-\nu} U^{(k)}(r) U^{(k)}(r - (\tau - \nu)) dr \right\} d\nu \right\} \\ &= \int_0^T h(\nu) R_{UU}(\tau - \nu) d\nu \end{aligned} \quad (3.9)$$

De laatste relatie is een convolutie integraal:

$$\boxed{R_{UY} = h * R_{UU}} \quad (3.10)$$

Vermits we hier werken met ergodische processen wordt dit ook

$$\boxed{\rho_{UY} = h * \rho_{UU}} \quad (3.11)$$

Deze vergelijking noemen we de vergelijking van **Wiener-Hopf**.

De Fourier getransformeerde van de deterministische correlatiefuncties bestaat wel! In het frequentiedomein wordt de autocorrelatie het vermogenspectrum

$$\boxed{S_{UU}(f) = \mathcal{F}(R_{UU}(t)) = \mathcal{F}(\rho_{UU}(t))} \quad (3.12)$$

en de cross correlatie het cross spectrum

$$\boxed{S_{UY}(f) = \mathcal{F}(R_{UY}(t)) = \mathcal{F}(\rho_{UY}(t))} \quad (3.13)$$

Dus wordt de vergelijking van Wiener-Hopf

$$\boxed{S_{UY}(f) = H(f) S_{UU}(f)} \quad (3.14)$$

De transferfunctie kan dus ook bepaald worden in het geval van ruis excitatie, uitgaande van de cross- en vermogen spectra. Bemerkt dat het bepalen van de correlatiefuncties en hun respectieve spectra nog steeds de lichaamscorrelaties of een oneindig lang meetvenster vereisen. Praktisch gezien zijn deze relaties dus nog steeds niet direct bruikbaar!

3.1.3 Ruis excitatie: invloed van een eindig meetvenster.

Tot nu toe hebben we steeds de correlatiefuncties of hun tijdsgemiddelde beschouwd. Het nadeel hiervan is dat we dan ook dat we steeds de signalen moeten kennen over een oneindig lang tijdsvenster. Praktisch gezien is dit echter onmogelijk, en zullen we het met een eindig venster moeten stellen.

Hoe groot is de fout die we maken door over te stappen van een oneindig tijdsvenster naar een eindig tijdsvenster? Om dit te bepalen, vertrekken we opnieuw van de definitierelatie (3.1). Wanneer we beschouwen dat de systeemrespons gemeten is over een eindig tijdsvenster T , dan zijn de in- en uitgangssignalen $u(t)$ en $y(t)$ ook enkel gekend voor $0 < t < T$. Deze signalen worden gedefinieerd over een eindig tijdsvenster als volgt:

$$\begin{cases} u_T(t) = U^{(k)}(t) & 0 < t < T \\ = 0 & t > T, t < 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} y_T(t) = Y^{(k)}(t) & 0 < t < T \\ = 0 & t > T, t < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

We willen dan aan de hand van de kennis van deze gevensterde functies $u_T(t)$ en $y_T(t)$ de impulsrespons $h(t)$ zo goed als mogelijk bepalen.

Vermits we enkel beschikken over benaderde signalen, zal ook de systeemrespons benaderd zijn. We voeren een benadering in die de afwijking tussen het gevensterd uitgangssignaal en de definitierelatie van het systeem voor het gevensterde ingangssignaal zo klein als mogelijk maakt. Dit leidt tot de volgende foutfunctie:

$$e(t) = y_T(t) - \int_0^\infty \tilde{h}(\theta) x_T(t - \theta) d\theta \quad (3.17)$$

hierin stelt $\tilde{h}(t)$ de benaderde impulsrespons voor. Dit is hier een willekeurige functie, die we kiezen zodat de afwijking $e(t)$ minimaal wordt. We hopen dat de benadering “in de buurt” van de echte impulsrespons zal liggen.

Wanneer het meetvenster oneindig groot is, vinden we de definitierelatie van het originele systeem terug en is de fout al nul, wat een goed teken is.

De foutfunctie “minimaliseren” is een slecht gesteld probleem. Functies kunnen we immers niet ordenen. Om toch een minimalisatie toe te laten, nemen we een norm van de foutfunctie. De norm is een scalaire grootte en dus is de minimalisatie ervan wel mogelijk. We kiezen hier voor de 2-norm, wat met een kleinste kwadraten benadering overeenstemt. We bepalen dus:

$$\min_{h(\theta)} \{E(T)\} = \min_{h(\theta)} \left\{ \int_0^T e^2(t) dt \right\} \quad (3.18)$$

Om dit minimum eenvoudig te bepalen passen we het volgende trucje toe. We schrijven de benaderende functie $\tilde{h}(\theta)$ als de som van de (onbekende) oplossing $\hat{h}_{LS}(\theta)$ en een willekeurige storing $h_{afw}(\theta)$.

$$\tilde{h}(\theta) = \hat{h}_{LS}(\theta) + \alpha h_{afw}(\theta) \quad (3.19)$$

De kleinste kwadraten oplossing is dan eenvoudig weg die functie $\tilde{h}(\theta)$ waarvoor $\alpha = 0$ en dan is de norm van de foutfunctie minimaal:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 = \int_0^T 2e(t) \left[\frac{\partial e(t)}{\partial \alpha} \right] dt \quad (3.20)$$

Substitutie van $e(t)$ en $h(\theta)$ in deze relatie:

$$\frac{2}{T} \int_0^T \left(y_T(t) - \int_0^\infty \hat{h}_{LS}(\theta) u_T(t-\theta) d\theta \right) \left(\int_0^\infty h_{afw}(\tau) u_T(t-\tau) d\tau \right) dt = 0 \quad (3.21)$$

Deze relatie geldt voor om het even welke functie $h_{afw}(\tau)$. We zonderen deze functie nu af:

$$\frac{2}{T} \int_0^\infty h_{afw}(\tau) \left(\int_0^T u_T(t-\tau) \left(y_T(t) - \int_0^\infty \hat{h}_{LS}(\theta) u_T(t-\theta) d\theta \right) dt \right) d\tau = 0 \quad (3.22)$$

De enige manier om dit te bekomen is dat de tweede factor van de integrand van de integraal naar $d\tau$ identiek nul zou worden, of

$$\int_0^T u_T(t-\tau) y_T(t) dt = \int_0^\infty \hat{h}_{LS}(\theta) \left(\int_0^T u_T(t-\theta) u_T(t-\tau) dt \right) d\theta \quad (3.23)$$

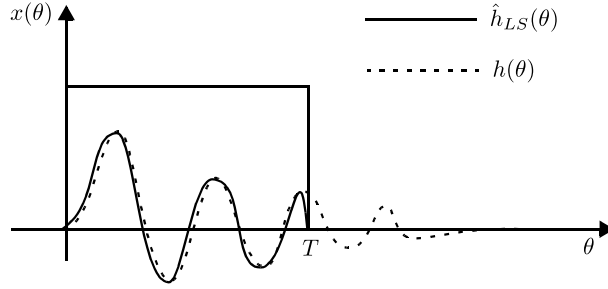
De integralen die over t lopen gelijken zeer goed op de definities van de correlatie integralen, maar met dit verschil dat ze over een beperkt tijdsvenster worden genomen. We zullen deze integralen dan ook definiëren als de tijdsbeperkte correlatiefuncties:

$$\begin{aligned} R_{uy}(\tau, T) &= \int_0^T u_T(t-\tau) y_T(t) dt \\ R_{uu}(\tau, T) &= \int_0^T u_T(t-\tau) u_T(t) dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

De theoretische relatie tussen de correlatiefuncties en de impulsrespons is dus dezelfde als de relatie tussen de benadering van de correlatiefuncties en de benadering van de impulsrespons. Dit gelukkig toeval zullen we dan gebruiken om de benaderde impulsrespons te bepalen,

$$\begin{aligned} R_{uy}(\tau, T) &= \int_0^\infty \hat{h}_{LS}(\theta) R_{uu}(\tau-\theta, T) d\theta \\ R_{uy}(\tau, T) &= \hat{h}_{LS}(\theta) * R_{uu}(\tau-\theta, T) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Bemerk dat de kwaliteit van de benadering van de impulsrespons een functie wordt van het gekozen meetvenster T . Kiezen we dit venster te klein, dan wordt slechts een deel van de impulsrespons benaderd. Dit resulteert uiteraard in een onbetrouwbaar resultaat. Al wat buiten dat venster valt wordt namelijk op nul gesteld, en dit kan zoals in figuur 3.1 leiden tot zeer grote benaderingsfouten.



Figuur 3.1: Gevaar van een te klein tijdsvenster.

Een laatste benadering bestaat er in om deze betrekking te discretiseren. De correlaties worden dan periodiek met een periode die gelijk is aan de periode van het meetvenster. In discrete vorm wordt dit gegeven door de volgende circulaire convolutie relaties:

$$\begin{aligned}
 R_{uy}(n) &= \sum_{i=0}^{N-1} y(i)u(i-n) \\
 R_{uu}(n) &= \sum_{i=0}^{N-1} u(i)u(i-n)
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

De discrete vorm van de correlatierelatie wordt dan:

$$R_{uy}(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_{LS}(i) R_{uu}(n-i) \tag{3.27}$$

Wanneer deze relatie dan via DFT naar het discrete frequentiedomein wordt omgezet wordt dit:

$$H_{LS}(n) = \frac{S_{UY}(n)}{S_{UU}(n)} \tag{3.28}$$

We kunnen dus wel degelijk de waarde van de FRF schatten uitgaande van een ruissignaal. We betalen echter een prijs, want de discrete spectra zijn nog steeds stochastische grootheden, en om een goed resultaat te bekomen zullen we dus moeten uitmiddelen, zoals we deden voor het periodogram.

Bibliografie

- [1] Brillinger, D R, '*Time Series: Data Analysis and Theory*' Holden-Day, San Francisco, 1975
- [2] Pintelon R. and J. Schoukens, "System Identification: A frequency domain approach", IEEE press and Wiley, 2001.
- [3] Pintelon R., J. Schoukens and G. Vandersteen, Frequency domain identification using arbitrary signals, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, pp. 1717-1720, 1997.
- [4] Schoukens J., Y. Rolain and R. Pintelon, Analysis of windowing/leakage effects in frequency response function measurements, Automatica, to be published
- [5] Kollàr I., 'The frequency domain identification toolbox for Matlab'.